8° Μάθημα: 26/11/2020

Συστήματα Sturm-Liouville:

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου θα χρησιμοποιείται σε πιο γενική της μορφή:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x)\cdot f^*(x)\cdot g(x)\,dx$$

όπου $w(x)$ είναι μια συνάρτηση βάρους. Θεωρούμε διαφορικές εξισώσεις της μορφής $Lu=\lambda u$ με τελεστή $L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)$ πραγματικό. $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

Ζητάμε τον προσαρτημένο του L.

Τότε:

$$\langle g|L|f\rangle = \int_a^b w(x)\cdot g^* L f\,dx = \int_a^b w\cdot g^* a(x)\frac{d^2 f}{dx^2}dx +$$

$$+\int_a^b w\cdot g^* b(x)\cdot\frac{df}{dx}dx + \int_a^b w g^* \gamma(x) f\,dx$$

Θέτω $w_1 = w\cdot a\cdot g^*$, $w_2 = wb\cdot g^*$

$$\int_a^b w_1 f''\,dx = \left[w_1\cdot f'\right]_a^b - \int_a^b w_1'\cdot f'\,dx =$$

$$=\left[w_1\cdot f'\right]_a^b - \left[w_1'\cdot f\right]_a^b + \int_a^b w_1''\cdot f\,dx$$

$$\int_a^b w_2\cdot f'\,dx = \left[w_2\cdot f\right]_a^b - \int_a^b w_2' f\,dx$$

Συνολικά: $\langle g|L|f\rangle = \left[a(f,g)\right]_a^b - \int_a^b (w_1'' f - w_2' f + w g^*\gamma f)\,dx$

$$w_1'' = \underbrace{(wag^*)''}_{[(w\cdot a\cdot g^*)]''} = (wa)''g^* + 2(wa)'\cdot g^{*\prime} + (wa)\cdot g^{*\prime\prime}$$

$$w_2' = \left[(wb)g^*\right]' = (wb)'\cdot g^* + (wb)\cdot g^{*\prime} \quad \text{Δηλ.}$$

$$\langle g|L|f\rangle = \left[a(f,g)\right]_a^b + \int_a^b (wag^{*\prime\prime}f - wbfg^{*\prime} + w\gamma g^* f)\,dx$$

$$+\int_a^b \left[(wa)''g^* + 2(wa)'\cdot g^{*\prime} - (w\cdot b)' g^*\right] f\,dx$$

$$= \Big[Q(f,g)\Big]_a^b + \int_a^b (waf g^{*''} + wb f g^{*'} + w\gamma g^{*} f)\, dx +$$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' g^{*} + 2(wa)' g^{*'} - (wb)' g^{*} - 2(wb) g^{*'} \right] f\, dx$$

$$= \Big[Q(f,g)\Big]_a^b + \int_a^b w \cdot L g^{*} f\, dx + \int_a^b \left[(wa)'' - (wb)' \right] g^{*} f\, dx +$$

$$+ \int_a^b 2\left[(wa)' - wb \right] g^{*'} f\, dx$$

Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν:

a. $\Big[Q(f,g)\Big]_a^b = 0$ και b. $(wa)' = wb$

Δηλαδή:

a. $\Big[Q(f,g)\Big]_a^b = \Big[w_1 \cdot f'\Big]_a^b - \Big[w_1' \cdot f\Big]_a^b + \Big[w_2 \cdot f\Big]_a^b = 0$

b. $(wa)' - wb = 0 \Rightarrow w'a + a'w - wb = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow w' + \underbrace{\frac{a' - b}{a}}_{\text{συνάρτηση του } x} w = 0 \Rightarrow \frac{1}{w}\frac{d(aw)}{dx} = b$$

Τότε $\langle g|L|f\rangle = \langle Lg|f\rangle$ δηλαδή ο τελεστής L είναι αυτοπροσαρτημένος. Όμως:

$$L = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + \gamma = a\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{w}(aw)'\frac{d}{dx} + \gamma \iff$$

$$L = \frac{1}{w}\left[aw\frac{d^2}{dx^2} + (aw)'\frac{d}{dx} \right] + \gamma = \underbrace{\frac{1}{w}\left[\frac{d}{dx}\left(aw\frac{d}{dx} \right) \right]}_{\text{παράγωγος γινομένου}} + \gamma =$$

$$= \frac{1}{w}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx} \right) + \gamma w \right] \quad p(x) = aw$$

όπου $w' + \frac{a' - b}{a} w = 0 \Rightarrow w(x) = \frac{c}{|a(x)|} e^{\int \frac{b}{a} dx}$

$$\int \frac{w'}{w} = -\frac{a' - b}{a}$$

$\hookrightarrow \ln|w|$

επιλέξαμε $w(x) > 0$

Ορίζουμε το πρόβλημα $Lu = \lambda w u$, $L = \frac{d}{dx}(w a)\frac{d}{dx} + \gamma(x)\cdot w(x)$

με συνοριακές συνθήκες $w a\left[f^* g' - f f^{*\prime}\right]_a^b = 0$
Τότε ο L είναι self-adjoint και $\lambda \in \mathbb{R}$
Τα προβλήματα αυτά καλούνται Sturm-Liouville
και ορίζονται για διάφορες συναρτήσεις a, b, γ.
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα ορθογώνια πολυώνυμα.

Πρόχειρο:

$a u'' + b u' + \gamma u = \lambda u$ γινόμενο $w = w(x)$.

$\underbrace{w a u'' + w b u'}_{\text{τέλεια παράγωγος} = (pu')'} + \gamma u w = \lambda w u.$

Παράδειγμα:

Πολυώνυμα Legendre:

$a(x) = 1 - x^2$, $b(x) = 2x$, $\gamma(x) = \ell(\ell+1)$, $\ell \in \mathbb{N}$
$[a,b] = [-1,1]$, $w(x) = 1$
Διαφ. εξίσ. $(1-x^2)u'' + 2xu' + \ell(\ell+1)u = \lambda u$.

Πολυώνυμα Laguerre

$a = x$, $b = v + 1 - x$, $\gamma = \gamma_0$, $v, \gamma_0 \in \mathbb{R}$
$w(x) = x^v \cdot e^{-x}$

Πολυώνυμα Hermite:

$a(x) = 1$, $b(x) = -2x$, $\gamma(x) = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$w(x) = e^{-x^2}$

Γενικεύση:

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{dy}{dx}\right]+q(x)\cdot y+\lambda w y=0$$

$$a_1\cdot y(a)+a_2\cdot p(a)\cdot y'(a)=0 \quad , a_1^2+a_2^2\neq 0$$

$$b_1\cdot y(b)+b_2\, p(b)\, y'(b)=0 \quad , b_1^2+b_2^2\neq 0$$

Τότε το πρόβλημα Sturm-Liouville καλείται

a. regular (κανονικό) αν $p,w>0$ στο $[a,b]$

β. singular (ιδιόμορφο) αν $p>0$, $p(a)=p(b)=0$ $w>0$

c. periodic (περιοδικό) αν $p(a)=p(b)$, $p,w>0$

$y(a)=y(b)$

$y'(a)=y'(b)$

Θεώρημα: Κάθε γραμμικός, δευτέρας τάξης τελεστής μπορεί να γραφεί σε μορφή Sturm-Liouville.

Αποδ:

Θεωρούμε την εξίσωση $a_2\cdot y''+a_1\cdot y'+a_0\cdot y=f(x)$

$a_2=a_2(x)$, $a_1=a_1(x)$, $a_0=a_0(x)$

Θεωρώ μια συνάρτηση $w=w(x)$ ώστε η εξίσωση να είναι:

$$w a_2\cdot y''+a_1 w y'+a_0\cdot w y=f w \Leftrightarrow a_2\neq 0$$

$$w y''+w\frac{a_1}{a_2}y'+\frac{a_0}{a_1}w y=\frac{f w}{a_2}$$

Απαιτώ $w y''+w\frac{a_1}{a_2}y'=(w y')'=w y''+w' y' \Rightarrow w'=\frac{a_1}{a_2}$

Συνεπώς η εξίσωση γράφεται

$$(wy')'+\frac{a_0}{a_2}wy=\frac{fw}{a_2}$$ και ορίζοντας

$$p(x)=e^{\int\frac{a_1}{a_2}dx}, \quad q(x)=p(x)\frac{a_0}{a_1}, \quad F=p(x)\frac{f}{a_2}$$

$$(p y')'+q y=F$$

Ιδιοτιμές: (regular)

1. Αν $\exists$ ιδιοτιμές τότε είναι πραγματικές.

Αποδ:

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και η εξίσωση είναι $Ly + \lambda w y = 0$

Τότε $L\bar{y} + \bar{\lambda} w \bar{y} = 0$ $\quad \bar{y}$ συζυγής μιγαδικός

$$\begin{cases} Ly + \lambda w y = 0 \times \bar{y} \Rightarrow \bar{y}Ly + \lambda w |y|^2 = 0 \\ L\bar{y} + \bar{\lambda} w \bar{y} = 0 \times y \Rightarrow yL\bar{y} + \bar{\lambda} w |y|^2 = 0 \end{cases}$$ αφαιρώ.

$(\bar{y}Ly - yL\bar{y}) + (\lambda - \bar{\lambda}) w |y|^2 = 0$ ολοκληρώνω

$\int (\bar{y}Ly - yL\bar{y}) dx = p[y'\bar{y} - \bar{y}'y]$ (άσκηση)

συνεπώς από συνοριακές συνθήκες.

$p[y'\bar{y} - \bar{y}'y]_a^b = 0$

Άρα. $(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\int_a^b w(x) \cdot |y|^2 dx}_{>0} = 0$ $\quad \lambda = \bar{\lambda}$ ή $\lambda \in \mathbb{R}$.

διαφορετικές

2. Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $w(x)$.

Αποδ:

Έστω u, v οι ιδιοσυναρτήσεις (λύσεις) που αντιστοιχούν στις λ_1 κ' λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{cases} Lu + \lambda_1 w u = 0 \times v \\ Lv + \lambda_2 w v = 0 \times u \end{cases} \xrightarrow{\text{αφαιρώ}} \int_a^b w \cdot u v \, dx = 0$$

(άσκηση)